UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho

Processo Seletivo para Professor Substituto ao provimento de vagas definidas para o ano de 2021.

- Setorização: Cálculo Superior (I, II, III e IV): matemática com aplicações em física.

Ponto 3

1. Conceito de Integral definida e indefinida (R1), propriedades e aplicações em física;
   a) Encontre o valor da integral definida de x=-1 até x=+1 da função f(x) = 1/x^2.
   b) Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva abaixo em torno do eixo y:
      y = exp(-x^2)
   c) Uma corda de 300kg e 50m de comprimento está pendurada a partir do alto de um edifício. A corda não chega a tocar o solo. Qual o trabalho mecânico (W=F.d) necessário para içar a corda para cima do prédio? Suponha g=10m/s/s.
   d) ~~Encontre as primitivas das funções abaixo~~:

Ponto 7

2. Integrais Múltiplas (R2 e R3) e aplicações físicas;
   a) Calcule a integral abaixo

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$$

   b) Usando coordenadas polares e integração com várias variáveis, encontre o volume delimitado pelo plano $z=0$ e o parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$

Ponto 8

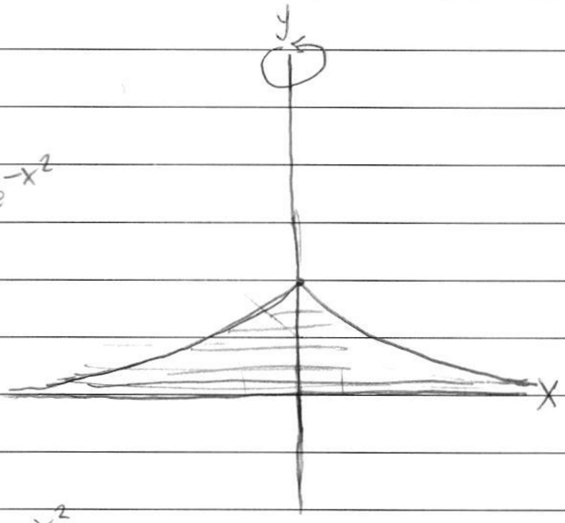
3. Séries de potências, propriedades e aplicações físicas, em especial, das séries de Taylor;
   a) Introduza o conceito de séries de potências, seus usos e interpretação dos termos. Ilustre com exemplo(s).
   b) Encontre os 3 primeiros termos não nulos da série de Taylor de f(x) = sen(x) na vizinhança de x = "pi"

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho
Processo Seletivo para Professor Substituto ao provimento de vagas definidas para o ano de 2021.
- Setorização: **Cálculo Superior (I, II, III e IV): matemática com aplicações em física.**
Edital nº 416 de 27 de maio de 2021.

Nº de inscrição:	007	Fl. nº 1

1. a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = -1 - (1) = -2$

b)



$y = e^{-x^2}$

$V = \int \pi [f(y)]^2\,dy$

$V = \int_0^1 \pi \left[\sqrt{Ln\,1/y}\right]^2 dy$

$V = \int_0^1 \pi\, Ln\,1/y\,dy$ $\quad u = 1/y$

$du = -1/y^2\,dy$

$y = e^{-x^2}$ $\quad -\frac{du}{u^2} = dy$

$Ln\,y = -x^2$

$Ln\,1/y = x^2$ $\quad V = \int_1^{\infty} \frac{\pi\, Ln\,u}{u^2}\,du$

$\pm\sqrt{Ln\,1/y} = x$ $\quad w = Ln\,u \quad dv = 1/u^2\,du$

$dw = 1/u \quad v = -1/u$

$V = \pi \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{Ln\,u}{u}\,du = \pi \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{Ln\,u}{u}\Big|_1^{t} + \int_1^t \frac{1}{u^2}\,du \right]$

$V = \pi \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{Ln\,u}{u}\Big|_1^t - \frac{1}{u}\Big|_1^t \right)$, Como u vai para infinito mais rápido que Ln u o primeiro termo é zero.

$V = \pi\left(0 + \frac{0}{1} - (0 - 1)\right) = \pi$ $\quad \boxed{V = \pi}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho
Processo Seletivo para Professor Substituto ao provimento de vagas definidas para o ano de 2021.
- Setorização: **Cálculo Superior (I, II, III e IV): matemática com aplicações em física**.
Edital nº 416 de 27 de maio de 2021.

Nº de inscrição:	007	Fl. nº 2

1c) $W = \int F \cancel{y}\, dy$

Temos 300kg distribuidos em 50m, então a densidade da corda é

$$\frac{300kg}{50m} = \frac{6kg}{m}$$

$W = mgy$

Então ~~a~~ ~~f~~ o trabalho de um pedaço de corda ~~em~~ será: $W = \left(\frac{6Kg}{m} \cdot y\right) y$

Agora somando as contribuções temos:

$$W = \int_0^{50} 6y \cdot y\, dy = \int_0^{50} \cancel{3}6y^2 dy = \frac{\cancel{6}y^3}{\cancel{3}}\Bigg|_0^{50} = \cancel{50000}$$

$W = 2(50)^3 = 2(125 \cdot 1000)\,J = 250000\,J$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho
Processo Seletivo para Professor Substituto ao provimento de vagas definidas para o ano de 2021.
- Setorização: **Cálculo Superior (I, II, III e IV): matemática com aplicações em física**.
Edital nº 416 de 27 de maio de 2021.

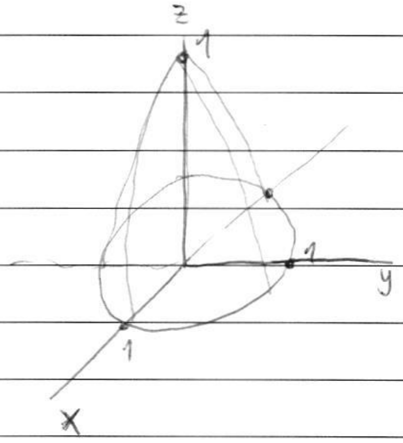
Nº de inscrição: 007 | Fl. nº 3

2a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

$$\int_0^3 \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_1^2 dx = \int_0^3 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 x^2 dx = \int_0^3 \left(\frac{2-1}{2}\right) x^2 dx = \frac{3}{2}\int_0^3 x^2 dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3\cdot 9}{2} = \frac{27}{2}$$

2b)



$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)\, r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^3 \, dr \, d\theta \, dz$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta \, dz$$

$$V = \frac{1}{4}\int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta \, dz$$

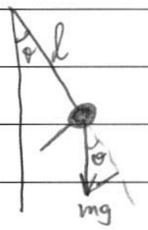
$$V = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{V = \pi/2}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho
Processo Seletivo para Professor Substituto ao provimento de vagas definidas para o ano de 2021.
- Setorização: **Cálculo Superior (I, II, III e IV): matemática com aplicações em física**.
Edital nº 416 de 27 de maio de 2021.

Nº de inscrição:	007	Fl. nº 4

3a) A série de potência é um conceito usado na física e na matemática principalmente para resolver equações diferenciais, para ~~apar~~ escrever de forma aproximada uma função ao redor de um determinado ponto e em consequência permite escrever expresões mais simplificadas como é o caso da equação de movimento para um pêndulo. Também é uma ferramenta que permite saber a convergencia de uma série.

No caso do pêndulo se desejamos uma versão "simplificada" da eq de movimento realizamos o diagrama de corpo livre e achamos que a aceleração tangencial está relacionada com uma componente da gravidade:



$a_t = -g \operatorname{sen}\theta$ lembrando que $a_t = \ell\ddot{\theta}$

$\ell\ddot{\theta}(t) = -g \operatorname{sen}\theta$

$\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Mas usando ~~os primeiros~~ o primeiro termo da série de Taylor nesse caso encontramos o termo que é usado amplamente nos cursos de mecânica: $\ddot{\theta} + w^2\theta = 0$, com $w^2 = g/\ell$. Para dizer que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ temos que encontrar a série de Taylor desta função.

A série de Taylor está definida como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$ onde $a=0$, $f^{(n)}(a)$ é a derivada da função avaliada no ponto desejado

Neste caso $\operatorname{sen}X$, do redor de zero se escreve:

$f(x) = \operatorname{sen}X$; $f(0) = 0$
$f'(x) = \cos X$ $f'(0) = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen}X$ $f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos X$ $f'''(0) = -1$
⋮ ⋮

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho

Processo Seletivo para Professor Substituto ao provimento de vagas definidas para o ano de 2021.
- Setorização: **Cálculo Superior (I, II, III e IV): matemática com aplicações em física**.
Edital nº 416 de 27 de maio de 2021.

Nº de inscrição:	007	Fl. nº 05

Usando a expresão anterior obtemos:

$$f(x) = 0 + x + 0 + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Por isto, sempre se fala que a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \theta + \theta^3/3! \dots$ é para ângulos ~~pequen~~ pequenhos $\theta \leq 10°$.

* Também tem séries de potências características como a série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$ e ela é convergente em $|x| < 1$

E pode ser usada como "base" para escrever outras séries:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Nº de inscrição:	007	Fl. nº 6

3b) Avaliando em $x=\pi$

$f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow 0 = f(\pi)$ ✓

$f'(x) = \cos x \rightarrow -1 = f'(\pi)$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow 0 = f''(\pi)$

$f'''(x) = -\cos x \rightarrow 1 = f'''(\pi)$

$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow 0 = f^{(4)}(\pi)$

$f^{(5)}(x) = \cos x \rightarrow -1 = f^{(5)}(\pi)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = \cancel{\frac{0(x-\pi)^0}{1}} + \frac{(-1)(x-\pi)^1}{1!} + \cancel{\frac{0(x-\pi)^2}{2!}} + \frac{1(x-\pi)^3}{3!} + \cancel{\frac{0(x-\pi)^4}{4!}} - \frac{1(x-\pi)^5}{5!} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} (x-\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

3a)